

2020
MATHEMATICS
[GENERAL]
Paper : II

Full Marks : 100

Time : 3 Hours

*The figures in the right-hand margin indicate marks.**Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.**Notations and symbols have their usual meanings.*

1. Answer any **ten** questions: $2 \times 10 = 20$

যে-কোনো দশটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

- a) Find the image of the point $(1, -2, 3)$ in the plane $2x - 3y + 2z + 3 = 0$.

$(1, -2, 3)$ বিন্দুটির $2x - 3y + 2z + 3 = 0$ তলে
প্রতিবিম্বটি নির্ণয় কর।

- b) Show that the vectors $(1, -1, 0)$, $(-1, 0, 1)$ and $(0, 1, -1)$ are linearly dependent.

দেখাও যে $(1, -1, 0)$, $(-1, 0, 1)$ এবং $(0, 1, -1)$ ভেক্টরগুলি রেখিক ভাবে স্বাধীন।

- c) If $f: x \rightarrow 2x$, $g: x \rightarrow x^2$ and $h: x \rightarrow (x+1)$, then find $h \circ (gof)$ and $(hog) \circ f$. Also find the relation between them.

যদি $f: x \rightarrow 2x$, $g: x \rightarrow x^2$ এবং $h: x \rightarrow (x+1)$ হয়,
তাহলে $h \circ (gof)$ এবং $(hog) \circ f$ নির্ণয় কর। এদের
মধ্যে সম্পর্কটিও নির্ণয় কর।

- d) If the mapping $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ be defined by

$$f(m, n) = m + n \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z},$$

then check this mapping is injective or not.
একটি চিত্রন $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত

$$f(m, n) = m + n \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}$$

চিত্রনটি injective কিনা পরীক্ষা কর।

- e) Find the non-zero root of the equation:

প্রদত্ত সমীকরণটির অশূন্য বীজটি নির্ণয় কর :

$$\begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x + a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x + a_3 \end{vmatrix} = 0; \quad a_1, a_2, a_3 \neq 0.$$

- f) Find the equation of the line joining the point A and the centroid G of the triangle ABC with vertices A(1, 2, 3), B(2, 3, 4) and C(6, -2, 5).

ΔABC -এর শীর্ষ A এবং ভরকেন্দ্র G বিন্দুগামী রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে ত্রিভুজটির শীর্ষগুলি হল $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$ এবং $C(6, -2, 5)$ ।

- g) Write down the equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ at the point $(2, 0, 1)$.

$(2, 0, 1)$ বিন্দুতে $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ গোলকের স্পর্শতলের সমীকরণ নির্ণয় কর।

- h) Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$ (n being positive).

n -এর ধনাত্মক মানের জন্য $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$ -এর মান নির্ণয় কর।

- i) Find the planes which are parallel to the plane

$$3x - 2y + 6z + 8 = 0$$

and at a distance of 2 units from it.

$3x - 2y + 6z + 8 = 0$ তলের সমান্তরাল এবং তলটি থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত তলগুলি নির্ণয় কর।

- j) A square matrix A satisfies the relation $2A + 5AB + I = 0$. Find the inverse of A.

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A, $2A + 5AB + I = 0$ সম্পর্কটি সিদ্ধ করে। A ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

- k) Evaluate (মান নির্ণয় কর) : $\int_0^\infty e^{-x} dx$

- l) Find the value of $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$.

$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$ -এর মান নির্ণয় কর।

- m) Evaluate

মান নির্ণয় কর :

$$\int_0^3 \int_0^1 r e^{2\theta} dr d\theta.$$

- n) Determine the length of an arc of the cycloid $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ measured from the vertex ($\theta = 0$).

$x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ cycloid-এর শীর্ষ ($\theta = 0$) থেকে পরিমিত যে কোণও বক্র অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

- o) If $\vec{a}(u) = 2u^4 \hat{i} - 5\hat{j} + (u - u^2)\hat{k}$, then find the value of $\int \vec{a}(u) du$.

যদি $\vec{a}(u) = 2u^4 \hat{i} - 5\hat{j} + (u - u^2)\hat{k}$, তাহলে $\int \vec{a}(u) du$ -এর মান নির্ণয় কর।

MODULE-III

(Marks : 40)

GROUP-A

2. Answer any **two** questions: $10 \times 2 = 20$

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

- a) i) Let, $a = mq + b$, q being an integer, be denoted by $a \equiv b \pmod{m}$. Then for $c \equiv d \pmod{m}$ prove that

$$(a+c) \equiv (b+d) \pmod{m}.$$

ধর, q পূর্ণ সংখ্যা হলে $a = mq + b$ -কে $a \equiv b \pmod{m}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় তাহলে $c \equiv d \pmod{m}$ -এর জন্য প্রমাণ কর

$$(a+c) \equiv (b+d) \pmod{m}.$$

- ii) Show that the set of all non-zero integers does not form a group with the binary operations multiplication and subtraction.

দেখাও যে গুণ এবং বিয়োগ দ্঵িনির্ধানী প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে সকল অশূন্য পূর্ণসংখ্যার সেটটি একটি দল গঠন করতে পারে না।

- iii) If 'a' be an element of a multiplicative group with identity element e and if $a^2 = a$, then show that $a = e$.

$$3+(2+2)+3$$

যদি e একক পদ সহ একটি গুণ সাপেক্ষে দলের a একটি পদ হয় এবং যদি $a^2 = a$ হয়, তাহলে দেখাও যে $a = e$ ।

- b) i) Determine the rank of the matrix:

ম্যাট্রিক্সটির 'rank' নির্ণয় কর :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ii) Solve by Cramer's rule :

Cramer-এর নিয়ম অনুযায়ী সমাধান কর :

$$x + 2y - z = 9, 2x - y + 3z = -2, \\ 3x + 2y + 3z = 9.$$

- iii) Express the matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ as

the sum of two matrices, of which one is symmetric and the other is skew-symmetric. 4+3+3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ ম্যাট্রিক্সটিকে একটি প্রতিসম এবং একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল আকারে প্রকাশ কর।}$$

- c) i) Find the characteristic roots of the matrix:

পদ্ধতি ম্যাট্রিক্সটির চারিত্বিক বৈশিষ্ট্য বীজ নির্ণয় কর :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- ii) Determine the values of α, β, γ for the orthogonal matrix:

লম্ব ম্যাট্রিক্সটির জন্য α, β, γ -এর মান নির্ণয় কর :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

- iii) Using row-reduction method determine

the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(2+2)+3+3

'Row-reduction' পদ্ধতি ব্যবহার করে

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সটির 'Rank' নির্ণয় কর।

GROUP-B

3. Answer any **two** questions: $10 \times 2 = 20$

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

- a) i) Find the condition that the straight lines

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{a\alpha} = \frac{y}{b\beta} = \frac{z}{c\gamma} \quad \text{and}$$

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad \text{will lie on a plane.}$$

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{a\alpha} = \frac{y}{b\beta} = \frac{z}{c\gamma} \quad \text{এবং}$$

$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ সরলরেখাগুলি একই সমতলে
অবস্থিত হওয়ার শর্ত নির্ণয় কর।

- ii) Prove that the straight line
 $2x + 3y - z = 0 = 3x - 2y + 2z - 6$ is not parallel to the z-axis.

প্রমাণ কর যে $2x + 3y - z = 0 = 3x - 2y + 2z - 6$
সরলরেখাটি z-অক্ষের সমান্তরাল নয়।

- iii) A plane cuts the axes in A, B, C and the centroid of the triangle ABC is (a, b, c) . Show that the equation of the

plane is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$. $4+2+4$

একটি তল অক্ষগুলিকে A, B, C বিন্দুতে ছেদ
করে এবং ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (a, b, c)
বিন্দু। দেখাও যে তলটির সমীকরণ হল

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$$

- b) i) Show that the straight lines

$$\frac{px}{l} = \frac{qy}{m} = \frac{rz}{n}, \quad \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad \text{and}$$

$\frac{x}{pl} = \frac{y}{qm} = \frac{z}{rn}$ are coplanar, if

$p = q$ or, $q = r$ or, $r = s$.

দেখাও যে সরলরেখাগুলি

$$\frac{px}{l} = \frac{qy}{m} = \frac{rz}{n}, \quad \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad \text{এবং}$$

$\frac{x}{pl} = \frac{y}{qm} = \frac{z}{rn}$ একতলীয় হবে যদি $p = q$ অথবা $q = r$ অথবা $r = s$ হয়।

- ii) Find the shortest distance between the

$$\text{straight lines } \frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{+1} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{and}$$

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{-4}.$$

উপরের সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

- iii) Find the equation of the cylinder where generators are parallel to the straight line $2x = y = 3z$ and which passes through the circle $y = 0, x^2 + z^2 = 6$.

3+4+3

একটি চোঙের সমীকরণ নির্ণয় কর যার 'generator'গুলি $2x = y = 3z$ সরলরেখার

সমান্তরাল এবং $y = 0, x^2 + z^2 = 6$ বৃত্তের পরিধিগামী।

- c) i) Find the equation of the cone whose vertex is at the point $(1, 2, 3)$ and base is the curve $2x^2 + 3y^2 = 1, z = 0$.

একটি শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ $(1, 2, 3)$

বিন্দুতে এবং ভূমির বক্ররেখাটি $2x^2 + 3y^2 = 1, z = 0$ ।

- ii) Find the equation of the straight lines in which the plane $2x + y - z = 0$ cuts the cone $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$. Find also the angle between these lines. 5+5

$2x + y - z = 0$ তলটি $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$ শঙ্কুটিকে যে যে সরলরেখা বরাবর ছেদ করে তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। তাদের মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় কর।

MODULE-IV

(Marks : 40)

GROUP-A

4. Answer any **two** questions: $10 \times 2 = 20$

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

- a) i) State and prove the Lagrange's first mean value theorem.

ল্যাগ্রাঞ্জের প্রথম মধ্যম মান উপপাদ্যটি বিবৃত করে প্রমাণ কর।

- ii) Stating the condition under which the expansion is valid, expand $\log_e(1+x)$ in powers of x in infinite series. $5+5$
গ্রাহ্য শর্তাবলী বিবৃত করে $\log_e(1+x)$
অপেক্ষকটিকে x -এর অসীম ঘাত পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

- b) i) Find the condition that the curves $ax^3 + by^3 = 1$ and $a'x^3 + b'y^3 = 1$ should cut orthogonally.

$ax^3 + by^3 = 1$ এবং $a'x^3 + b'y^3 = 1$ পরম্পরাকে
লম্বভাবে ছেদ করার শর্ত নির্ণয় কর।

- ii) Show that for the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ the radius of curvature at any point is twice the portion of the normal intercepted

between the curve and the axis of x .

দেখাও যে $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ cycloid-টির যে কোনও বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ,
ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের বক্ররেখা এবং x -
অক্ষ দ্বারা ছিন্ন অংশের দ্রিঙ্গণ।

- iii) Find the asymptotes of the following curve: $3+4+3$

নিম্নলিখিত বক্ররেখাটির অসীম পথগুলি নির্ণয় কর :

$$y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$$

- c) i) Show that $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ decreases steadily in $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

দেখাও যে $0 < x < \frac{\pi}{2}$ বিষ্ঠারে $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ যথার্থ
অবরোহী।

- ii) If p_1 and p_2 be the perpendiculars from the origin on the tangent and normal respectively at any point on the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, then show that $4p_1^2 + p_2^2 = a^2$.

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ররেখার যে কোনও বিন্দুতে
অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্বের মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত
লম্বদ্বয় যথাক্রমে p_1 এবং p_2 হলে দেখাও যে
 $4p_1^2 + p_2^2 = a^2$ ।

iii) Find the envelope of the straight lines

$$y = mx + a\sqrt{1+m^2}, \text{ for parameter } m.$$

3+4+3

$$m \text{ থেকে } y = mx + a\sqrt{1+m^2}$$

সরলরেখাগুলির envelope নির্ণয় কর।

GROUP-B

5. Answer any **one** question: $10 \times 1 = 10$

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

a) i) Find the perimeter of the cardioid
 $r = a(1 - \cos \theta)$ and show that the arc of
 the upper half of the curve is bisected

$$\text{by } \theta = \frac{2}{3}\pi.$$

5

$r = a(1 - \cos \theta)$ cardioid টির পরিসীমা নির্ণয়

$$\text{কর এবং দেখাও যে উপরের অর্ধটি } \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ দ্বারা}$$

সমদিখণ্ডিত হয়।

ii) Evaluate (মান নির্ণয় কর) :

$$\int_{z=2}^3 \int_{y=1}^2 \int_{x=0}^1 (2x + 3y + 5z) dx dy dz \quad 5$$

b) i) Evaluate the following integral and discuss its convergence:

নিম্নলিখিত সমাকলিতি নির্ণয় কর এবং তার সমকেন্দ্রিকভাবে ব্যাখ্যা কর :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$$

ii) Compute:

মান নির্ণয় কর :

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$$

iii) Show that for $n > 1$

$n > 1$ -এর জন্য দেখাও যে

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \quad 4+3+3$$

GROUP-C

6. Answer any **one** question: $10 \times 1 = 10$

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

a) i) If $\vec{F} = (5x^2 + 6y)\hat{i} - (3x + 2y^2)\hat{j} + 2xz^2\hat{k}$,
 then evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ from $t=0$ to $t=1$
 along the path C given by $x=t$, $y=t^2$,
 $z=t^3$.

C: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ বক্ররেখা বরাবর

$$t=0 \text{ থেকে } t=1 \text{-বিস্তারে } \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{-এর মান}$$

নির্ণয় কর, যেখানে

$$\vec{F} = (5x^2 + 6y)\hat{i} - (3x + 2y^2)\hat{j} + 2xz^2\hat{k}$$

- ii) Find the unit vector in the direction of the tangent at any point on the curve given by

$$\vec{r} = (a \cos t)\hat{i} + (a \sin t)\hat{j} + (bt)\hat{k}$$

$$\vec{r} = (a \cos t)\hat{i} + (a \sin t)\hat{j} + (bt)\hat{k} \text{ বক্ররেখাটির}$$

উপর যে কোণও বিন্দুতে একক স্পর্শ ভেস্টরটি নির্ণয় কর।

- iii) Find $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi)$, where $\varphi = 2x^2y^3z^4$.

$$5+3+2$$

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi)$ -এর মান নির্ণয় কর যেখানে

$$\varphi = 2x^2y^3z^4$$

- b) i) Find the gradient and the unit normal to the level surface $x^2 + y - z = 1$ at the point (1, 0, 0).

$$x^2 + y - z = 1 \text{ বক্রতারে } (1, 0, 0) \text{ বিন্দুতে}$$

'gradient' এবং একক অভিলম্বটি নির্ণয় কর।

- ii) Prove that, $\operatorname{div}\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\{r^2 f(r)\}$

where \vec{r} is the position vector of any

point, $r = |\vec{r}|$ and $f(r)$ is differentiable function.

$$\text{দেখাও যে } \operatorname{div}\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\{r^2 f(r)\},$$

যেখানে \vec{r} একটি অবস্থান ভেস্টর, $r = |\vec{r}|$ এবং $f(r)$ একটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক।

$$\text{iii) If (যদি) } \vec{r}_1(t) = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k},$$

$$\vec{r}_2(t) = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{r}_3(t) = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k},$$

then prove that (তাহলে প্রমাণ কর যে)

$$\int_1^2 [\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_3] dt = 0.$$

$$3+4+3$$